

Kapitel 2

Stetigkeit

Stetigkeit ist für reellwertige Funktion mehrerer Veränderlicher wie für Funktionen einer Veränderlichen definiert. Eine Funktion f ist stetig an einem Häufungspunkt $\vec{x}_0 \in D_f$, wenn der Grenzwert an dieser Stelle mit dem Funktionswert übereinstimmt, d.h. wenn

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

gilt. Damit diese Gleichung Sinn ergibt, müssen wir erklären, was wir unter dem Grenzwert einer Funktion mehrerer Veränderlicher verstehen wollen.

Für Funktionen einer Veränderlichen hatten wir Grenzwerte mithilfe von Folgen definiert. Bei Funktionen mehrerer Veränderlicher machen wir dies genauso. Damit ergibt sich das folgende Programm:

Folgen im $\mathbb{R}^n \rightarrow$ Grenzwerte von Funktionen $\rightarrow$ Stetigkeit.

Um die Notation einfach zu halten, identifizieren wir durchgängig Spaltenvektoren mit Koordinaten von Punkten, welche wir als Zeilenvektoren notieren.

2.1 Folgen im $\mathbb{R}^n$

Definition 2.1 Eine (Punkt-)Folge $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ bzw. $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^\infty$ im $\mathbb{R}^n$ ist eine nummerierte Menge von unendlich vielen Punkten $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

Beispiel 2.2 Für die Folge

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 1 - \frac{1}{k^2} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

im $\mathbb{R}^2$ gilt

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}, \dots$$

Die Punkte $P_k = (x_k, y_k)$ liegen auf der Parabel

$$y = 1 - x^2$$

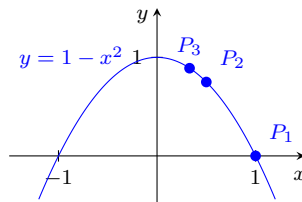


Abb. 2.1: Punktfolge auf Parabel.

und *nähern sich* für den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ dem Punkt $P^* = (0, 1)$:

$$\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 1 - \frac{1}{k^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{k^4}}_{\rightarrow 0}} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty. \quad \triangle$$

Beispiel 2.2 zeigt eine mögliche Veranschaulichung von Punktfolgen. Eine Punktfolge entsteht, wenn sich ein Fahrzeug entlang einer stetigen Kurve im $\mathbb{R}^2$ bewegt und die Position des Fahrzeugs zu den Zeitpunkten $t = k$, $k \in \mathbb{N}$ gemessen wird. Analog kann man sich eine Punktfolge im $\mathbb{R}^n$ als Bewegung eines Punktes im $\mathbb{R}^n$ vorstellen, bei welcher die Position des Punktes jeweils zur Zeit $t = k$, $k \in \mathbb{N}$ notiert wird.

Der in Beispiel 2.2 vorgenommene Grenzübergang führt auf den folgenden Konvergenzbegriff:

Definition 2.3 Eine Folge $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^\infty$, $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$, heißt *konvergent gegen den Grenzwert* $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$, wenn die reelle Zahlenfolge der Abstände $\{\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|\}_{k=1}^\infty$ gegen Null strebt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}^* : \Longleftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| = 0.$$

Die Konvergenz von Punktfolgen $\{\vec{x}_k\}$ wird hierbei zurückgeführt auf die Konvergenz von Folgen reeller Zahlen. Die in Band 1 entwickelten Methoden zur Konvergenzuntersuchung können damit unmittelbar angewendet werden. Für die praktische Berechnung von Grenzwerten ist Definition 2.3 allerdings nicht gut geeignet, da die Berechnung der Norm aufwändig ist. Der nächste Satz erleichtert die Konvergenzuntersuchung.

Satz 2.4 Die Folge $\{\vec{x}_k\}$, $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$, konvergiert genau dann gegen einen Punkt $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$, wenn die Zahlenfolgen aller Komponenten konvergieren.

Der Satz besagt, dass Konvergenz in der Norm und komponentenweise Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Beispielsweise gilt im $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^*.$$

Beweis (im $\mathbb{R}^2$):

„ $\Rightarrow$ “: Nach Voraussetzung ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| = 0$. Zu zeigen ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^*.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x^*| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_k - x^*)^2} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_k - x^*)^2 + (y_k - y^*)^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| \stackrel{\text{Vor.}}{=} 0, \end{aligned}$$

also $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$. Ebenso lässt sich $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^*$ nachweisen.

„ $\Leftarrow$ “: Nach Voraussetzung gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^*$. Dann folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\underbrace{(x_k - x^*)^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(y_k - y^*)^2}_{\rightarrow 0}} = 0.$$

Im Fall $n > 2$ führt man die gleichen Schlüsse für alle Komponenten durch. $\square$

Beispiel 2.5

$$1. \quad \vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{k+1} \\ 2 \cdot \sqrt[k]{17} \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 2 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{17} = 2$$

$$\text{folgt } \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad \vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-k} \\ (-1)^k \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-k} = 0, \quad \text{aber: } \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \text{ existiert nicht.}$$

Daher existiert $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k$ ebenfalls nicht. $\triangle$

Falls eine gegebene Folge nicht konvergiert oder falls die Konvergenz nicht nachgewiesen werden kann, interessiert man sich dafür, ob die Folge zumindest beschränkt ist. Wir werden sehen, dass die speziellen Eigenschaften beschränkter Zahlenfolgen auch auf beschränkte Punktfolgen zutreffen. Insbesondere gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß für beschränkte Punktfolgen.

Definition 2.6 Eine Folge $\{\vec{x}_k\}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Kugel gibt, in der *alle* Punkte $\vec{x}_k$ liegen.

Z.B. ist $\{\vec{x}_k\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 1 - \frac{1}{k} \end{pmatrix} \right\}$ beschränkt, aber $\{\vec{y}_k\} = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ nicht.

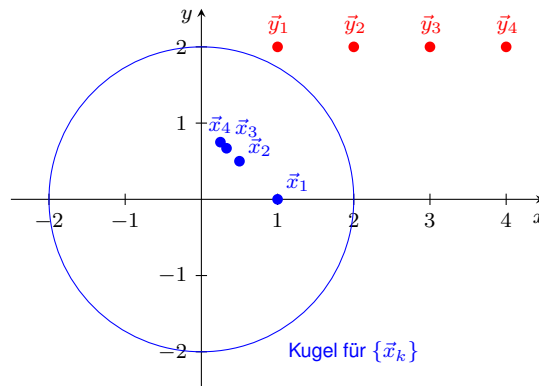


Abb. 2.2: Beschränkte Folge.

Mit ähnlicher Argumentation wie im Beweis von Satz 2.4 zeigt man, dass eine Punktfolge genau dann beschränkt ist, wenn jede ihrer Komponentenfolgen beschränkt ist. Wie für Zahlenfolgen gilt weiter

Satz 2.7 Jede konvergente Folge $\{\vec{x}_k\}$ ist beschränkt.

Beweis (wie für Zahlenfolgen): $\{\vec{x}_k\}$ sei konvergent mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}^*$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_k\| &= \|\vec{x}_k - \vec{x}^* + \vec{x}^*\| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|}_{\leq c_1} + \underbrace{\|\vec{x}^*\|}_{\leq c_2} \leq c_1 + c_2 =: c, \\ &\leq c_1, \text{ da } \lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| = 0 \end{aligned}$$

d.h. alle $\vec{x}_k$ liegen in einer Kugel um den Ursprung mit Radius c . □

Ebenfalls wie für Zahlenfolgen gilt der wichtige

Satz 2.8 (Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge $\{\vec{x}_k\}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis (für $n = 2$): Es sei $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$. Wegen $|x_k| \leq \|\vec{x}_k\|$ ist $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ eine beschränkte Zahlenfolge, zu der nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß aus Band 1 eine konvergente Teilfolge $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots = \{x_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ existiert.

Setze nun $\xi_n := x_{k_n}$ und $\eta_n := y_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Wegen $|\eta_n| \leq \|\vec{x}_{k_n}\|$ ist $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ eine beschränkte Zahlenfolge, welche eine konvergente Teilfolge $\eta_{n_1}, \eta_{n_2}, \dots = \{\eta_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ besitzt. Da Teilfolgen aus konvergenten Zahlenfolgen ebenfalls konvergieren, ist die Teilfolge $\{\xi_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ konvergent und somit konvergiert auch die Teilfolge $\begin{pmatrix} \xi_{n_1} \\ \eta_{n_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_{n_2} \\ \eta_{n_2} \end{pmatrix}, \dots$ nach Satz 2.4.

Im Fall $n > 2$ schließt man analog mit vollständiger Induktion über alle Komponenten. $\square$

Beispiel 2.9 Gegeben sei die Folge

$$\begin{aligned} \vec{x}_k &= \left\{ \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) \\ (-1)^k \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man $k_n = 3n$, d.h. $k_1 = 3$, $k_2 = 6$, $k_3 = 9$, usw., dann ist die Folge $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ mit

$$\xi_n := x_{k_n} = x_{3n} = \sin\left(\frac{3n\pi}{3}\right) = \sin(n\pi) = 0 \quad \text{für alle } n$$

als konstante Folge trivialerweise konvergent. Mit der zugehörigen Teilfolge

$$\eta_n := y_{k_n} = y_{3n} = (-1)^{3n} = (-1)^n$$

erhält man die Teilfolge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

aus welcher man durch erneute Teilfolgenauswahl die konvergente Teilfolge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi_{2n} \\ \eta_{2n} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

ausliest. $\triangle$

Als weitere Eigenschaft übertragen sich die für Zahlenfolgen bekannten Regeln für Grenzwerte von Summen und von Produkten mit reellen Zahlen auf Punktfolgen.

Satz 2.10 (Rechenregeln für Folgengrenzwerte) Gegeben seien konvergente Folgen $\{\vec{x}_k\}$, $\{\vec{y}_k\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}^*$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{y}_k = \vec{y}^*$. Dann gelten

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} (\vec{x}_k \pm \vec{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k \pm \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{y}_k = \vec{x}^* \pm \vec{y}^*.$
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} (c \cdot \vec{x}_k) = c \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = c \cdot \vec{x}^* \text{ für } c \in \mathbb{R}.$

Beweis: 1. und 2. gelten komponentenweise. □

2.2 Grenzwerte multivariater Funktionen

Grenzwerte für Funktionen einer Veränderlichen hatten wir in Band 1 zunächst für Punkte x_0 definiert, in denen eine punktierte Umgebung im Definitionsbereich existierte. Danach hatten wir Grenzwerte für Funktionen einer Veränderlichen auch für den Fall erklärt, dass an der Stelle x_0 nur eine einseitige punktierte Umgebung im Definitionsbereich enthalten war. Im $\mathbb{R}^n$ ist jedoch nicht ersichtlich, wie man im Allgemeinen eine einseitige Umgebung definieren sollte. Daher diskutieren wir Grenzwerte im Folgenden nur noch in Häufungspunkten von D_f . Dies schließt alle bisherigen Fälle ein.

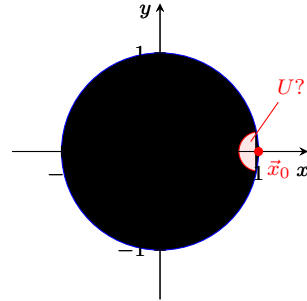


Abb. 2.3: Häufungspunkt am Rand.

Als erstes Resultat charakterisieren wir Häufungspunkte mithilfe von Folgen.

Satz 2.11 *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Punkt. Dann ist $\vec{x}_0$ genau dann ein Häufungspunkt von D , wenn es eine Folge $\{\vec{x}_k\}$ von Punkten aus D gibt mit*

$$\vec{x}_k \in D, \vec{x}_k \neq \vec{x}_0 \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0.$$

Beweis: Wir zeigen nur eine Richtung des Beweises. Die Rückrichtung beweist man analog.

$\vec{x}_0$ sei Häufungspunkt von D , d.h. in jeder ε -Umgebung von $\vec{x}_0$ liege ein von $\vec{x}_0$ verschiedener Punkt aus D . Für $k = 1, 2, \dots$ sei nun

$$\varepsilon_k := \frac{1}{k} \text{ und } \vec{x}_k \in D \cap U_{\varepsilon_k}(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\}.$$

Dann folgt

$$\|\vec{x}_0 - \vec{x}_k\| \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

$$\text{d.h. } \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0. \quad \square$$

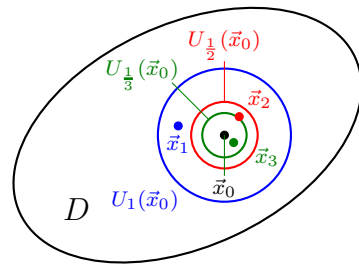


Abb. 2.4: Häufungspunkt mit konvergenter Punktfolge.

Nach dieser Vorbereitung können wir Grenzwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher erklären.

Definition 2.12 Gegeben seien eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sowie ein Häufungspunkt $\vec{x}_0$ von D . Wenn eine Zahl c existiert, sodass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = c \text{ für jede Folge } \{\vec{x}_k\} \text{ mit } \vec{x}_k \in D, \vec{x}_k \neq \vec{x}_0 \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0$$

gilt, dann heißt c Grenzwert von f für $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$:

$$c = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) \quad \text{bzw. im } \mathbb{R}^2 \quad c = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y).$$

Beispiel 2.13

1. Gegeben sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 + \frac{1}{y}, \quad D_f = \{(x,y) \mid y \neq 0\}.$$

Der natürliche Definitionsbereich D_f von f ist $\mathbb{R}^2$ ohne die x -Achse. Im Folgenden soll untersucht werden, ob für $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Grenzwert

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(x^2 + \frac{1}{y} \right) \text{ existiert.}$$

Da $\vec{x}_0$ Häufungspunkt von D_f ist, existiert eine Folge $\{\vec{x}_k\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \right\}$ mit

$$\begin{cases} \vec{x}_k \in D_f \text{ für alle } k \in \mathbb{N}, \\ \vec{x}_k \neq \vec{x}_0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

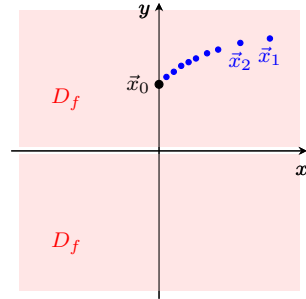


Abb. 2.5: Punktfolge gegen $\vec{x}_0$.

Nach Satz 2.4 gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0 \iff \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 1. \end{cases}$$

Mit dem Satz über die Grenzwerte von Zahlenfolgen aus Band 1 folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(x_k^2 + \frac{1}{y_k} \right) = 0^2 + \frac{1}{1} = 1 = c.$$

Dies gilt für jede Folge $\{\vec{x}_k\}$ mit der Eigenschaft (2.1). Somit ergibt sich

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(x^2 + \frac{1}{y} \right) = 1.$$

2. Existiert für die Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2)}{x^2 + y^2}, \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

der Grenzwert $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?

Der Punkt $(0, 0)$ gehört nicht zu D_f , er ist aber Häufungspunkt von D_f . Wir vermuten, dass der Grenzwert nicht existiert und suchen zum Nachweis entweder eine gegen $(0, 0)$ strebende Folge $\{\vec{y}_k\}$, für die der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{y}_k)$ nicht existiert, oder zwei gegen den Ursprung konvergierende Folgen $\{\vec{y}_k\}$ und $\{\vec{z}_k\}$, für die die zugehörigen Folgen der Funktionswerte gegen unterschiedliche Grenzwerte streben. Dazu eignen sich hier die auf den Koordinatenachsen gegen den Ursprung verlaufenden Punktfolgen

$$\vec{y}_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

mit

$$\vec{y}_k, \vec{z}_k \in D_f, \quad \vec{y}_k \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_k \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{y}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{z}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

für welche

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k^2} + 0^2} \stackrel{t = \frac{1}{k^2}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 1,$$

aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{z}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(0)}{0^2 + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0$$

gelten. Der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k)$ hängt demnach von der Folge $\{\vec{x}_k\}$ ab. Also existiert $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ nicht.

Das Beispiel zeigt auch, dass aus der Existenz von $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k)$ für eine (oder mehrere) spezielle gegen $\vec{x}_0$ konvergente Folge(n) $\{\vec{x}_k\}$ *nicht* folgt, dass $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ existiert. Dies gilt bereits für Zahlenfolgen, siehe Band 1. $\triangle$

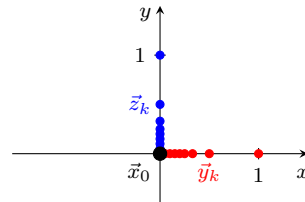


Abb. 2.6: Unterschiedliche gegen $(0, 0)$ konvergierende Punktfolgen.

Wie bei Funktionen einer Veränderlichen ist es manchmal geschickt, Grenzwerte unabhängig von Zahlenfolgen durch Anwendung des folgenden Satzes zu bestimmen:

Satz 2.14 Es ist $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = c$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon \quad \text{für alle } \vec{x} \in \dot{U}_\delta(\vec{x}_0) \cap D_f$$

gilt.

Grenzwerte von Summen und Produkten behandelt man wie bei Zahlenfolgen:

Satz 2.15 (Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen) Die beiden Grenzwerte

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_1(\vec{x}) = c_1 \quad \text{und} \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_2(\vec{x}) = c_2$$

mögen existieren. Dann gelten für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\alpha \cdot f_1(\vec{x}) \pm \beta \cdot f_2(\vec{x})) = \alpha \cdot c_1 \pm \beta \cdot c_2.$
2. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f_1(\vec{x}) \cdot f_2(\vec{x})) = c_1 \cdot c_2.$
3. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{f_1(\vec{x})}{f_2(\vec{x})} = \frac{c_1}{c_2}, \quad \text{falls } c_2 \neq 0.$

Beweis: Ist $\{\vec{x}_k\}$ eine beliebige gegen $\vec{x}_0$ konvergente Folge, dann sind $\{f_1(\vec{x}_k)\}$ und $\{f_2(\vec{x}_k)\}$ Zahlenfolgen, für welche die Eigenschaften gelten (siehe Band 1). $\square$

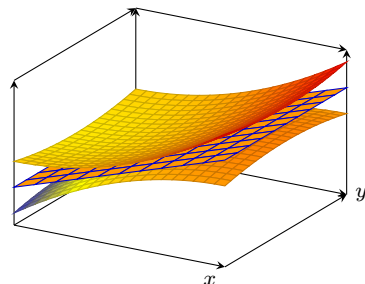
Beispiel 2.16

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2 + \frac{1}{y}}{\cos x + e^y} \stackrel{3.}{=} \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(x^2 + \frac{3}{y}\right)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (\cos x + e^y)} \stackrel{1.}{=} \frac{0^2 + \frac{3}{1}}{\cos 0 + e^1} = \frac{3}{1 + e}. \quad \triangle$$

Auch das Sandwich-Theorem gilt für Grenzwerte multivariater Funktionen:

Satz 2.17 (Sandwich-Theorem) Gegeben seien die auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ definierten reellwertigen Funktionen f, g und h sowie ein Häufungspunkt $\vec{x}_0$ von D . Weiter gelte

1. $g(\vec{x}) \leq f(\vec{x}) \leq h(\vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in D.$
2. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) = c.$



Dann existiert $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ und es gilt $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = c.$

Abb. 2.7: Sandwich-Theorem.

Beweis: Wie für Funktionen von einer Veränderlichen (vergleiche Band 1). $\square$

Selbstverständlich sind die Funktionen g und h in der Regel nicht gegeben. Man wendet das Sandwich-Theorem so an, dass man eine gegebene, kompliziert gebaute Funktion f , deren Grenzwert gesucht ist, nach oben und nach unten abschätzt durch Funktionen g und h , deren Grenzwerte einfacher zu berechnen sind.

Beispiel 2.18 Es sei

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{y}\right) & \text{für } y \neq 0, \\ 0 & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Da der Kosinus durch ± 1 abgeschätzt werden kann, gilt

$$\begin{cases} -x \leq f(x, y) \leq x & \text{für } x \geq 0, \\ x \leq f(x, y) \leq -x & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

also insgesamt

$$-|x| \leq f(x, y) \leq |x| \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Setzt man $g(x, y) := -|x|$, $h(x, y) := |x|$, dann folgt aus

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0$$

auch

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0. \quad \triangle$$

2.2.1 Grenzwerte abschnittsweise definierter Funktionen

In Band 1 hatten wir einseitige Grenzwerte von Funktionen betrachtet und festgestellt, dass der Grenzwert einer Funktion f an einem inneren Punkt ihres Definitionsbereichs existiert, wenn der links- und der rechtsseitige Grenzwert an dieser Stelle existieren und übereinstimmen. Bei Funktionen zweier Veränderlicher sind die Verhältnisse komplizierter, da es unendlich viele Richtungen gibt, aus denen man sich einem Punkt im $\mathbb{R}^2$ annähern kann. Glücklicherweise darf man Grenzwerte von abschnittsweise definierten Funktionen aber trotzdem auf die sinngemäß gleiche Art berechnen. Die mathematisch korrekte Formulierung des Sachverhalts ist zwar etwas umständlich, aber die Handhabung ist einfach.

Satz 2.19 Es sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und (x_0, y_0) sei ein Häufungspunkt von D . Außerdem gebe es zwei disjunkte Mengen D_1 und D_2 mit $D = D_1 \cup D_2$, für die (x_0, y_0) jeweils ein Häufungspunkt ist, sowie zwei Funktionen $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y) & \text{für } (x, y) \in D_1, \\ f_2(x, y) & \text{für } (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

Dann existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ genau dann, wenn die zugehörigen Grenzwerte für f_1 und f_2 existieren und übereinstimmen:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = c \iff \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in D_1}} f_1(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in D_2}} f_2(x,y) = c.$$

Die Aussagen gelten sinngemäß auch für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen und wenn f durch mehr als zwei alternative Funktionsausdrücke definiert ist.

Beweis: Die Beweisführung von links nach rechts erübrigt sich, da die Grenzwerte für f_1 und f_2 Spezialfälle des Grenzwerts von f sind.

Die Existenz der Grenzwerte für f_1 und f_2 sei nun vorausgesetzt. Nach Satz 2.14 existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Zahlen $\delta_1, \delta_2 > 0$, sodass

$$\begin{aligned} |f_1(x,y) - c| &< \varepsilon \\ \text{für alle } (x,y) &\in \dot{U}_{\delta_1}(x_0,y_0) \cap D_1, \\ |f_2(x,y) - c| &< \varepsilon \\ \text{für alle } (x,y) &\in \dot{U}_{\delta_2}(x_0,y_0) \cap D_2 \end{aligned}$$

gelten. Mit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ folgt

$$\begin{aligned} |f(x,y) - c| &< \varepsilon \\ \text{für alle } (x,y) &\in \dot{U}_{\delta}(x_0,y_0) \cap D. \end{aligned}$$

Wiederum nach Satz 2.14 ist dann $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = c$. □

Beispiel 2.20 Es sei

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } y \geq 0, \\ \cos y & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Gesucht ist $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

Setzt man $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$, $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x,y) = x^2 + 1$, $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x,y) = \cos y$, dann ist $(0,0)$ ein Häufungspunkt von D_1 und D_2 und es gilt

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_1}} f_1(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1, \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_2}} f_2(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \cos y = 1.$$

Also folgt nach Satz 2.19

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1. \quad \triangle$$

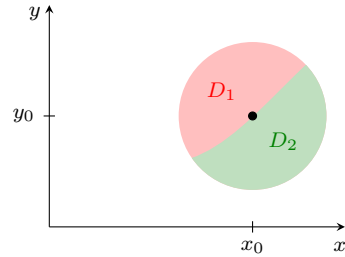


Abb. 2.8: Definitionsbereich einer abschnittsweise definierten Funktion.

2.2.2 Grenzwertberechnung mithilfe von Polarkoordinaten

Der Nachweis eines Grenzwerts mit Punktfolgen kann schwierig sein. Für Funktionen zweier Veränderlicher ist es aber möglich, in der (x, y) -Ebene durch

$$x - x_0 = r \cos \varphi,$$

$$y - y_0 = r \sin \varphi$$

lokale Polarkoordinaten mit Zentrum $\vec{x}_0$ einzuführen. Für *jede* gegen $\vec{x}_0$ konvergente Folge $\{\vec{x}_k\}$ gilt dann zwingend $\|\vec{x}_k - \vec{x}_0\| = r_k \rightarrow 0$. Setzt man

$$g(r, \varphi) := f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi),$$

dann gilt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} g(r, \varphi).$$

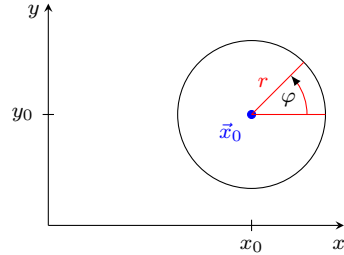


Abb. 2.9: Lokale Polarkoordinaten.

Falls g nicht von φ abhängt oder falls man die winkelabhängigen Terme in g abschätzen kann, ist der rechte Grenzwert einfacher zu berechnen als der linke. Für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen kann man analog Verallgemeinerungen von Polarkoordinaten in höheren Dimensionen verwenden.

Beispiel 2.21

1. Gegeben sei

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Wir berechnen den Grenzwert $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ mithilfe der Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$, d.h. $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\sin(r^2)}{r^2} \stackrel{t = r^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

In diesem Beispiel ist $g(r, \varphi) = \frac{\sin(r^2)}{r^2}$ unabhängig von φ , wodurch der Grenzwert in zwei Variablen auf einen eindimensionalen Grenzwert reduziert wird.

2. Gesucht sei

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-y)^2(x+y-2)}{x^2 + y^2 - 2(x+y-1)}.$$

Mit lokalen Polarkoordinaten

$$x = 1 + r \cos \varphi, \quad y = 1 + r \sin \varphi$$

folgt

$$\begin{aligned}
 & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-y)^2(x+y-2)}{x^2+y^2-2(x+y-1)} \\
 &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \frac{(1+r \cos \varphi - 1 - r \sin \varphi)^2(1+r \cos \varphi + 1+r \sin \varphi - 2)}{(1+r \cos \varphi)^2 + (1+r \sin \varphi)^2 - 2(1+r \cos \varphi + 1+r \sin \varphi - 1)} \\
 &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \frac{r^3(\cos \varphi - \sin \varphi)^2(\cos \varphi + \sin \varphi)}{1+r^2 \cos^2 \varphi + 1+r^2 \sin^2 \varphi - 2} \\
 &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \frac{r^3(\cos \varphi - \sin \varphi)^2(\cos \varphi + \sin \varphi)}{r^2(\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)} \\
 &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} r(\cos \varphi - \sin \varphi)^2(\cos \varphi + \sin \varphi).
 \end{aligned}$$

Der Term $r(\cos \varphi - \sin \varphi)^2(\cos \varphi + \sin \varphi)$ hängt zwar von φ ab, aber wegen

$$\lim_{r \rightarrow 0+} r = 0 \quad \text{und} \quad -8 \leq (\cos \varphi - \sin \varphi)^2(\cos \varphi + \sin \varphi) \leq 8$$

folgt nach dem Sandwich-Theorem

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \underbrace{r}_{\rightarrow 0} \underbrace{(\cos \varphi - \sin \varphi)^2(\cos \varphi + \sin \varphi)}_{\text{beschränkt}} = 0.$$

3. Für

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

ist

$$g(r, \varphi) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r^2} = \cos^2 \varphi.$$

Interpretiert man φ als festen Parameter, dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \cos^2 \varphi = \cos^2 \varphi.$$

Anschaulich ist dies der Funktionsgrenzwert für eine Punktfolge, die sich dem Ursprung auf einer Halbgerade nähert. Der Grenzwert hängt aber vom Polarwinkel φ der Halbgerade ab, sodass

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \cos^2 \varphi$$

nicht existiert.

Zur Verdeutlichung betrachten wir zwei Punktfolgen, die sich dem Ursprung auf zwei verschiedenen Halbgeraden nähern. Für

$$\vec{y}_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in Polarkoordinaten: } r_k = \frac{1}{k}, \varphi_k = 0),$$

$$\vec{z}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} \quad (\text{in Polarkoordinaten: } r_k = \frac{1}{k}, \varphi_k = \frac{\pi}{2})$$

gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + 0^2} = 1 = \cos^2 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{z}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0^2}{0^2 + \frac{1}{k^2}} = 0 = \cos^2 \frac{\pi}{2}.$$

4. Es sei

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y}, \quad x \neq y.$$

In Polarkoordinaten erhält man für $\varphi \notin \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$ die Funktionsvorschrift

$$g(r, \varphi) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r^2}{r(\cos \varphi - \sin \varphi)} = \frac{r}{\cos \varphi - \sin \varphi},$$

für welche

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} g(r, \varphi) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \frac{r}{\cos \varphi - \sin \varphi} \quad (2.2)$$

als von φ unabhängiger Grenzwert gesucht ist.

Hält man den Winkel $\varphi \notin \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$ fest, ist der Nenner ungleich Null und konstant, sodass

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{r}{\cos \varphi - \sin \varphi} = 0$$

gilt. Daraus folgt aber nicht, dass der gesuchte Grenzwert existiert!

Mit einer speziellen Punktfolge zeigen wir nun, dass der Grenzwert (2.2) nicht unabhängig von φ existiert. Dazu nutzen wir aus, dass der Term $\frac{1}{\cos \varphi - \sin \varphi}$ in der Nähe der Winkelhalbierenden unbeschränkt ist. Wir wählen eine gegen den Ursprung strebende Punktfolge $\{\vec{x}_k\}$ auf einer Kurve, die sich so schnell an die erste Winkelhalbierende anschmiegt, dass die zugehörige Folge der Funktionswerte gegen $-\infty$ strebt, obwohl die Folge der Radien $\{r_k\}$ gegen Null konvergiert.

Für die auf der Kurve $y = x + x^3$ liegende Punktfolge

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} + \frac{1}{k^3} \end{pmatrix}$$

ist dies erfüllt:

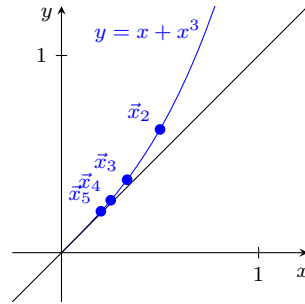


Abb. 2.10: Spezielle Punktfolge.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^4} + \frac{1}{k^6}}{-\frac{1}{k^3}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-2k - \frac{2}{k} - \frac{1}{k^3} \right) = -\infty. \quad \triangle$$

Der Einsatz von Polarkoordinaten vereinfacht die Grenzwertberechnung nur, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi)$$

vom Winkel φ unabhängig ist. Wie das vierte Beispiel zeigt, darf man φ dabei nicht wie einen festen Parameter behandeln.

2.3 Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Stetigkeit wird für Funktionen mehrerer Veränderlicher wie für Funktionen einer Veränderlichen definiert:

Definition 2.22 Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig an der Stelle* $\vec{x}_0 \in D$, wenn $\vec{x}_0$ ein Häufungspunkt von D ist und wenn $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ existiert und mit dem Funktionswert übereinstimmt, d.h. wenn gilt:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0).$$

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, dann heißt f stetig in D , wenn f in jedem Punkt $\vec{x} \in D$ stetig ist. Die Menge aller in D stetigen Funktionen wird mit $C^0(D)$ bezeichnet.

Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft. Eine Funktion f kann an einer einzigen Stelle $\vec{x}_0$ stetig und an allen anderen Stellen $\vec{x} \in D$ unstetig sein. Anschaulich ist eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wenn „der Graph keine Löcher hat“:

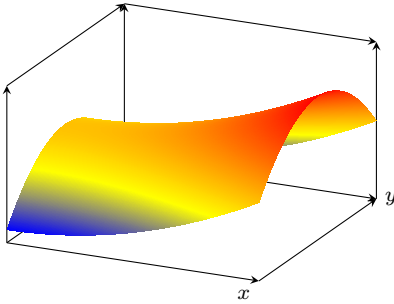


Abb. 2.11: Stetige Funktion.

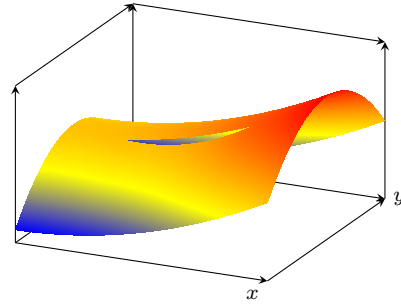


Abb. 2.12: Unstetige Funktion.

Beispiel 2.23 Die durch $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{y}$, $y \neq 0$, definierte Funktion ist stetig in $(x_0, y_0) = (0, 1)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(x^2 + \frac{1}{y} \right) = 1 = f(0, 1). \quad \triangle$$

Nach Definition 2.22 ist eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig an der Stelle $\vec{x}_0 \in D$, wenn $\vec{x}_0$ ein Häufungspunkt von D ist und wenn für jede in D gegen $\vec{x}_0$ konvergierende Folge $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$ die Folge der Funktionswerte $\{f(\vec{x}_n)\}_{n=1}^\infty$ gegen $f(\vec{x}_0)$ konvergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{x}_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x}_0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n\right).$$

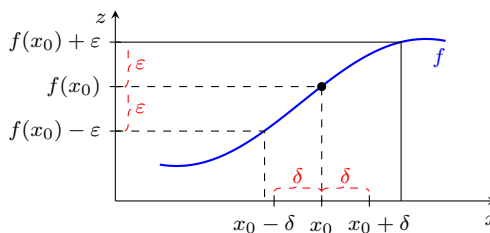
In anderen Worten: Eine Funktion ist stetig, wenn man das Funktionssymbol f und das Grenzwertsymbol vertauschen darf.

Wie bei Funktionen einer Veränderlichen kann man den Grenzwertbegriff und die Stetigkeit einer Funktion unabhängig von Folgen erklären.

Satz 2.24 (ε - δ -Definition der Stetigkeit) Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann an der Stelle $\vec{x}_0 \in D$ stetig, wenn $\vec{x}_0$ ein Häufungspunkt von D ist und wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon \text{ für alle } \vec{x} \in D \text{ mit } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$$

gilt, d.h. wenn aus $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ folgt, dass $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon$ ist.

Abb. 2.13: ε - δ -Definition der Stetigkeit für eine Funktion einer Veränderlichen.

Für Funktionen mehrerer Veränderlicher ist das ε - δ -Kriterium eher von theoretischem Interesse, da sich für ein gegebenes ε ein geeignetes δ nur bei sehr einfachen Funktionsvorschriften bestimmen lässt.

Beispiel 2.25 Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2 + x^2 y^2}$$

ist stetig im Punkt $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann ist ein $\delta > 0$ gesucht, sodass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| = \left| \underbrace{\frac{x^2 + y^2}{2 + x^2 y^2}}_{\geq 0} - 0 \right| = \frac{x^2 + y^2}{\underbrace{2 + x^2 y^2}_{\geq 0}} \leq \frac{1}{2} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{= \|\vec{x}\|^2} = \frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2 \stackrel{!}{<} \varepsilon$$

für $\|\underbrace{\vec{x} - \vec{x}_0}_{= \vec{0}}\| < \delta$ gilt. Mit der Beziehung

$$\frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2 < \varepsilon \iff \|\vec{x}\| < \sqrt{2\varepsilon} =: \delta(\varepsilon)$$

folgt, dass $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon$ für alle $\vec{x}$ mit $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$ erfüllt ist. $\triangle$

2.3.1 Stetige Kompositionen

Glücklicherweise benötigt man die angegebenen Kriterien nur selten zum Nachweis der Stetigkeit einer Funktion f . Wie bei Funktionen einer Veränderlichen zeigt man:

Satz 2.26 Gegeben seien zwei Mengen $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie zwei Funktionen $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Die beiden Funktionen f_1 und f_2 seien stetig im Punkt $\vec{x}_0 \in D_1 \cap D_2$. Dann sind auch die Kompositionen

1. $c_1 \cdot f_1 \pm c_2 \cdot f_2$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ fest),
2. $f_1 \cdot f_2$,
3. $\frac{f_1}{f_2}$ (falls $f_2(\vec{x}_0) \neq 0$)

in $\vec{x}_0$ stetig.

Beispiel 2.27 Die beiden Funktionen $f: (x, y) \mapsto x$ und $g: (x, y) \mapsto y$ mit $D_f = D_g = \mathbb{R}^2$ sind in *jedem* Punkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ wegen

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0 \quad \text{und} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} y = y_0$$

stetig. Nach Satz 2.26 folgt beispielsweise, dass auch die Kompositionen

$$(x, y) \mapsto f^2(x, y) = x^2, \quad (x, y) \mapsto g^2(x, y) = y^2, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) \cdot g(x, y) = xy$$

in jedem Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ stetig sind. Ebenso ist z.B. die rationale Funktion h mit

$$h(x, y) := \frac{f(x, y) \cdot g(x, y)}{f^2(x, y) + g^2(x, y)} = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig. △

Da in Polynomen und rationalen Funktionen nur die arithmetischen Grundoperationen auftreten, folgt aus Satz 2.26 allgemein:

1. Polynome in mehreren Variablen sind stetig.
2. Rationale Funktionen in mehreren Variablen sind auf ihrem natürlichen Definitionsbereich stetig.

Stetigkeit bleibt auch in Verkettungen stetiger Funktionen erhalten. Allerdings sind Verkettungen bei mehreren Veränderlichen komplexer gebaut als bei Funktionen einer Veränderlichen. Wir beschreiben den Sachverhalt zunächst für den Fall zweier Veränderlicher.

Gegeben seien eine Funktion $f(u, v)$, $(u, v) \in D_f$ sowie zwei Funktionen

$$\begin{aligned} u &= g(x, y), & (x, y) &\in D_g, \\ v &= h(x, y), & (x, y) &\in D_h. \end{aligned}$$

Einsetzen von g und h in f liefert die *verkettete (geschachtelte) Funktion*

$$F(x, y) = f(\underbrace{g(x, y)}_u, \underbrace{h(x, y)}_v), \quad (x, y) \in D_F.$$

Dabei dürfen die Definitionsbereiche D_g und D_h keinen leeren Schnitt haben und $D_F \subseteq D_g \cap D_h$ muss so gewählt werden, dass

$$(u, v) = (g(x, y), h(x, y)) \in D_f$$

für alle $(x, y) \in D_F$ gilt.

Beispiel 2.28 Für

$$f(u, v) = \frac{u^2 v^2}{u + v}, \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) \mid v = -u\}$$

erhält man mit

$$u = g(x, y) = x \cdot \cos y \quad \text{ sowie } \quad v = h(x, y) = x \cdot \sin y, \quad D_g = D_h = \mathbb{R}^2$$

die verkettete Funktion

$$F(x, y) = f(x \cos y, x \sin y) = \frac{(x \cos y)^2 (x \sin y)^2}{x \cos y + x \sin y}$$

$$\stackrel{x \neq 0}{=} \frac{x^3 \cos^2 y \sin^2 y}{\cos y + \sin y} = \frac{x^3 \cos^2 y \sin^2 y}{\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - y)}, \quad (x, y) \in D_F$$

mit $D_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

△

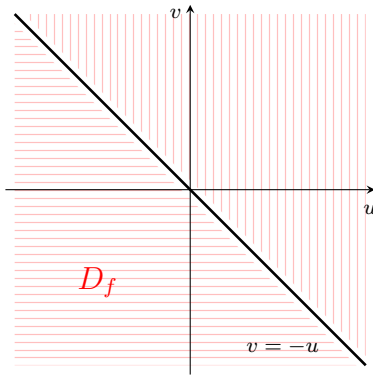


Abb. 2.14.a: D_f .

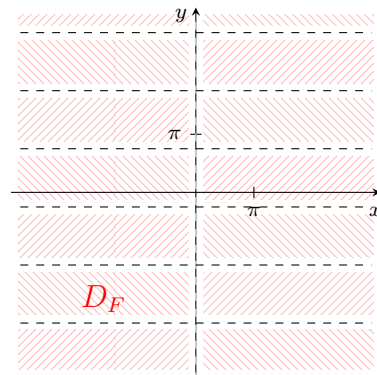


Abb. 2.14.b: D_F .

Satz 2.29 Die Funktionen $g(x, y)$ und $h(x, y)$ seien im Punkt (x_0, y_0) stetig. Die Funktion $f(u, v)$ sei in $(u_0, v_0) = (g(x_0, y_0), h(x_0, y_0))$ stetig. Dann ist die verkettete Funktion

$$F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$$

im Punkt (x_0, y_0) stetig.

Beweis: Sei $\{\vec{x}_k\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \right\}$ eine beliebige Folge mit $\vec{x}_k \neq \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \vec{x}_0$.

Da g und h nach Voraussetzung stetig sind, gilt für $u_k := g(x_k, y_k)$ und $v_k := h(x_k, y_k)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k, y_k) = g(x_0, y_0) = u_0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k, y_k) = h(x_0, y_0) = v_0.$$

Weil f in (u_0, v_0) nach Voraussetzung stetig ist, folgt

$$\begin{array}{ccc}
& \lim_{k \rightarrow \infty} f(u_k, v_k) = f(u_0, v_0) & \\
\cong & & \cong \\
\lim_{k \rightarrow \infty} f(g(x_k, y_k), h(x_k, y_k)) & & f(g(x_0, y_0), h(x_0, y_0)) \\
\parallel & & \parallel \\
\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, y_k) & \stackrel{(*)}{=} & F(x_0, y_0)
\end{array}$$

Da die Folge $\{\vec{x}_k\}$ beliebig gewählt war, gilt die Beziehung $(*)$ für *jede* gegen $\vec{x}_0$ konvergente Folge. Also gilt nach der Definition des Grenzwerts

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} F(x, y) = F(x_0, y_0),$$

d.h. $F(x, y)$ ist stetig in (x_0, y_0) . □

Beispiel 2.30 Es seien

$$\begin{aligned}
f(u, v) &= \frac{u}{v}, \quad v \neq 0, \\
g(x, y) &= x^2 y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\
h(x, y) &= x + e^y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Dann ist die Verkettung

$$F(x, y) := f(g(x, y), h(x, y)) = \frac{x^2 y^2}{x + e^y}$$

in jedem Punkt (x_0, y_0) , der $x_0 + e^{y_0} \neq 0$ erfüllt, stetig. △

Im allgemeinen Fall betrachtet man Verkettungen, bei denen die äußere reellwertige Funktion f von den m Variablen $u_1, \dots, u_m$ abhängt und jede Variable u_j eine reellwertige Funktion der n Unabhängigen $x_1, \dots, x_n$ darstellt. Dabei schreibt man abkürzend

$$\vec{g}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \vec{x} \in D_g \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Satz 2.31 (Stetigkeit von verketteten Funktionen) Die m reellwertigen Funktionen

$$g_j(\vec{x}), \quad \vec{x} \in D_g \subseteq \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m,$$

seien im Punkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ stetig. Die reellwertige Funktion $f(\vec{u})$, $\vec{u} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^m$ sei in $\vec{u}_0 = \vec{g}(\vec{x}_0)$ stetig. Dann ist die verkettete reellwertige Funktion

$$F(\vec{x}) := f(\vec{g}(\vec{x}))$$

im Punkt $\vec{x}_0$ stetig.

Beweis: Wie im Fall $m = n = 2$ (Satz 2.29). □

Beispiel 2.32

1. $m = 1, n > 1$: Es sei $f(u)$, $u \in D_f \subseteq \mathbb{R}$ eine elementare Funktion oder eine beliebige Verkettung elementarer Funktionen. Die Funktion $g(\vec{x})$, $\vec{x} \in D_g \subseteq \mathbb{R}^n$ sei stetig in $\vec{x}_0$ und f sei stetig in $u_0 = g(\vec{x}_0)$. Dann ist $F(\vec{x}) := f(g(\vec{x}))$ in $\vec{x}_0$ stetig.

a) $f(u) = \sqrt{u}$, $g(x, y) = x - y$, $(x_0, y_0) = (3, -1)$.

Die verkettete Funktion

$$F(x, y) := f(g(x, y)) = \sqrt{x - y}$$

ist stetig in (x_0, y_0) .

b) $f(u) = e^u$, $g(x, y, z) = x + yz$, $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Die Verkettung

$$F(x, y, z) := f(g(x, y, z)) = e^{x+yz}$$

ist in ganz $\mathbb{R}^3$ stetig.

c) $\ln(1 + \cos(x + y))$ ist stetig in allen Punkten (x_0, y_0) mit $x_0 + y_0 \neq (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

An diesen Ausnahmestellen ist die Funktion nicht definiert, da $\cos((2k + 1)\pi) = -1$ gilt und der Logarithmus von Null nicht existiert.

2. $m = 2, n = 3$: Es sei

$$f(u, v) = uv + \frac{1 + u}{1 + v}, \quad v \neq -1,$$

sowie

$$g_1(x, y, z) = x + y, \quad g_2(x, y, z) = xyz, \quad D_g = \mathbb{R}^3$$

und

$$F(x, y, z) = f(g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (x + y)xyz + \frac{1 + x + y}{1 + xyz},$$

$$D_F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + xyz \neq 0\}.$$

Dann ist F in $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stetig, weil g_1 und g_2 in $\vec{x}_0$ stetig sind und f in

$$\vec{u}_0 = \vec{g}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 + 1 \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stetig ist.

3. $m = 3, n = 1$: Es sei

$$f(u, v, w) = u + vw + \ln(2uw + v), \quad D_f = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid 2uw + v > 0\}$$

sowie

$$g_1(x) = x^2, \quad g_2(x) = e^x, \quad g_3(x) = x + 2, \quad x \in D_g = \mathbb{R}.$$

Die verkettete Funktion

$$F(x) = f(g_1(x), g_2(x), g_3(x)) = x^2 + (x + 2)e^x + \ln(2x^2(x + 2) + e^x)$$

ist definiert für

$$2x^2(x + 2) + e^x > 0 \iff x > -2.031 \dots$$

und speziell in $x_0 = 0$ stetig, da g_1, g_2, g_3 in $x_0 = 0$ stetig sind und f in

$$\vec{g}(0) = \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ g_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

stetig ist.

4. Ist die Funktion $f(x, y)$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig in x und y , dann ist die in Polarkoordinaten transformierte Funktion

$$g(r, \varphi) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

stetig in r und φ .

△

2.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

Die wichtigsten aus Band 1 bekannten Eigenschaften stetiger Funktionen gelten auch im Fall mehrerer Veränderlicher.

Satz 2.33 (Satz von der Beschränktheit und Satz vom Minimum und Maximum)

Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei kompakt, d.h. beschränkt und abgeschlossen. Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in D . Dann gelten

1. f ist beschränkt in D , d.h. es gibt eine positive reelle Zahl K , sodass $|f(\vec{x})| \leq K$ für alle $\vec{x} \in D$ gilt.
2. Es gibt zwei Punkte $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D$ mit

$$f(\vec{x}_1) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_2) \quad \text{für alle } \vec{x} \in D.$$

$\vec{x}_1$ ist Stelle des absoluten Minimums von f , $\vec{x}_2$ Stelle des absoluten Maximums.

Beweis: Wie in Band 1 mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß und der Definition der Stetigkeit. $\square$

Den Zwischenwertsatz führen wir auf den in Band 1 behandelten Fall zurück.

Satz 2.34 (Zwischenwertsatz) Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig. $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ seien zwei Punkte aus D , die durch eine ganz in D verlaufende stetige Kurve

$$K: \vec{x} = \vec{g}(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

mit Anfangspunkt $\vec{x}_1$ und Endpunkt $\vec{x}_2$ verbunden sind und für die

$$f(\vec{x}_1) = m < M = f(\vec{x}_2)$$

gilt. Dann nimmt f in D jeden Wert zwischen m und M an, d.h. es gilt $[m, M] \subseteq W_f$.

Beweis: Es sei

$$h(t) := f(\vec{g}(t)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Dann ist h nach Satz 2.31 stetig als Verkettung stetiger Funktionen. Wegen $h(t_1) = f(\vec{x}_1) = m$ und $h(t_2) = f(\vec{x}_2) = M$ folgt $[m, M] \subseteq W_h$ nach dem Zwischenwertsatz für Funktionen einer Veränderlichen. Aus $W_h \subseteq W_f$ folgt somit die Behauptung. $\square$

Im einfachsten Fall liegt die Verbindungsstrecke beliebiger Punkte $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ aus D ebenfalls in D . Insbesondere im Fall $D = \mathbb{R}^n$ ist dies erfüllt. Dann kann man den Zwischenwertsatz auf beliebige Paare von Funktionswerten von f anwenden.

Beispiel 2.35

1. Für den Wertebereich von

$$f(x, y) = \frac{\cos x}{1 + (x - y)^2(x + \pi)^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

erhalten wir mit der Abschätzung

$$|f(x, y)| = \frac{\overbrace{|\cos x|}^{\leq 1}}{\underbrace{(x - y)^2}_{\geq 0} \underbrace{(x + \pi)^2}_{\geq 0}} \leq 1$$

die Inklusion $W_f \subseteq [-1, 1]$. Wegen $f(0, 0) = 1$ und $f(-\pi, 0) = -1$ gilt andererseits nach dem Zwischenwertsatz $[-1, 1] \subseteq W_f$, d.h. insgesamt ist $W_f = [-1, 1]$.

2. Der natürliche Definitionsbereich D_f von

$$f(x, y) = \frac{(1 - \arctan x) \cdot y \cdot |y|}{(x + |x|)^2 + y^2}$$

ergibt sich aus

$$(x + |x|)^2 + y^2 = 0 \iff x + |x| = 0 \text{ und } y = 0 \iff x \leq 0 \text{ und } y = 0$$

zu $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$. Man spricht in diesem Fall von der „geschlitzten Ebene“.

Speziell für $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$f(-1, -1) = \frac{(1 + \frac{\pi}{4}) \cdot (-1) \cdot 1}{(-1 + 1)^2 + (-1)^2} = -1 - \frac{\pi}{4},$$

$$f(-1, 1) = \frac{(1 + \frac{\pi}{4}) \cdot 1 \cdot 1}{(-1 + 1)^2 + 1^2} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Für $\vec{x} \in D$ ist $f(\vec{x})$ stetig als Komposition stetiger Funktionen. Die Verbindungsstrecke von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ liegt nicht in D , aber es existiert eine stetige Kurve in Form eines Polygonzugs von $\vec{x}_1$ nach $\vec{x}_2$, die ganz in D liegt.

Hieraus folgt die Teilmengeneigenschaft

$$\left[-1 - \frac{\pi}{4}, 1 + \frac{\pi}{4}\right] \subseteq W_f.$$

Mit zusätzlichen Überlegungen zeigt man

$$W_f = \left(-1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right). \quad \triangle$$

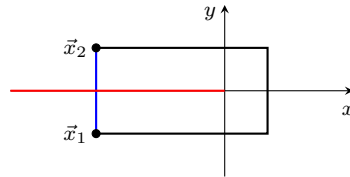


Abb. 2.15: Geschlitzte Ebene.

Anschauliche Höhere Mathematik für Ingenieure und
Naturwissenschaftler 2

Mehrdimensionale Analysis, Differenzialgleichungen: Ein
graphisch orientierter Zugang

Neher, M.

2018, XI, 321 S. 169 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-19421-5